

MATH-213 Géométrie Différentielle

Corrigé de l'examen de l'examen blanc

QCM - 1 La torsion de la courbe $\alpha(u) = (e^u, e^{-u}, \sqrt{2}u)$ est $\tau = -\frac{\sqrt{2}}{4 \cosh(u)^2}$.

QCM - 2 Les lignes de coordonnées de S se coupent orthogonalement si et seulement si $g_{1,2}$ est identiquement nul.

Question Vrai/Faux L'affirmation : *Si γ est une géodésique d'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$, alors sa courbure normale est nulle* est FAUSSE.

Problème 1.

On considère la courbe de $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = (\cos(t) + t \sin(t), \sin(t) - t \cos(t), t^2).$$

- (a) Trouver le ou les points singuliers de cette courbe.
 (b) Calculer l'abscisse curviligne $s = s(t)$ de cette courbe depuis le point initial $\gamma(0)$.

Pour les questions qui suivent on se restreint à $t > 0$.

- (c) Quels sont les points biréguliers de γ ?
 (d) Calculer le repère de Frenet $\{\mathbf{T}_\gamma(t), \mathbf{N}_\gamma(t), \mathbf{B}_\gamma(t)\}$.
 (e) Calculer la courbure et la torsion de γ .
 (f) Vérifier la troisième équation de Serret-Frenet pour cette courbe.

Solution.

(a) On a $\dot{\gamma}(t) = t(\cos(t), \sin(t), 2)$. La courbe est donc singulière en $\gamma(0) = (1, 0, 0)$ et régulière pour $t \neq 0$.

(b) La vitesse est $V(t) = \sqrt{5}|t|$, l'abscisse curviligne est donc

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{5}|u| du = \operatorname{sgn}(t) \frac{\sqrt{5}}{2} t^2.$$

(c) On a $\ddot{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t), 2) + t(-\sin(t), \cos(t), 0)$ et donc $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) = t^2(-2\cos(t), -2\sin(t), 1)$, qui est non nul $\forall t \neq 0$. Donc tous les points tels que $t \neq 0$ sont biréguliers.

(d) On a (pour $t > 0$)

$$\mathbf{T}_\gamma(t) = \frac{1}{V(t)}\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\cos(t), \sin(t), 2), \quad \mathbf{B}_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2 \cos(t), -2 \sin(t), 1).$$

Il y a plusieurs façons de calculer $\mathbf{N}_\gamma(t)$, par exemple

$$\mathbf{N}_\gamma(t) = \mathbf{B}_\gamma(t) \times \mathbf{T}_\gamma(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0).$$

Une autre façon est de calculer le vecteur de courbure, puis de le normaliser :

$$\mathbf{K}_\gamma(t) = \frac{1}{V(t)}\dot{\mathbf{T}}_\gamma(t) = \frac{1}{5t}(-\sin(t), \cos(t), 0), \quad \text{donc} \quad \mathbf{N}_\gamma(t) = \frac{\mathbf{K}_\gamma(t)}{\|\mathbf{K}_\gamma(t)\|} = (-\sin(t), \cos(t), 0).$$

(e) La torsion se calcule par exemple ainsi :

$$\tau_\gamma(t) = \frac{1}{V(t)}\langle \dot{\mathbf{N}}_\gamma(t), \mathbf{B}_\gamma(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}t}\langle (-\cos(t), -\sin(t), 0), \frac{1}{\sqrt{5}}(-2 \cos(t), -2 \sin(t), 1) \rangle = \frac{2}{5t}$$

(et la courbure vient d'être calculée : $\kappa_\gamma(t) = \|\mathbf{K}_\gamma(t)\| = \frac{1}{5t}$.)

(f) Vérifions la troisième équation de Serret-Frenet :

$$\frac{1}{V(t)}\dot{\mathbf{B}}_\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{5}t} \frac{2}{\sqrt{5}}(\sin(t), -\cos(t), 0) = -\frac{2}{5t}(-\sin(t), \cos(t), 0) = -\tau_\gamma(t)\mathbf{N}_\gamma(t).$$

Problème 2

- (a) Rappeler à quelle conditions sur une courbe $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ on peut définir le cercle osculateur en un point donné $\alpha(s)$.
- (b) Rappeler la définition du cercle osculateur. Préciser dans quel plan ce cercle est contenu.
- (c) Comment trouve-t-on le centre $c(s)$ et le rayon $\rho(s)$ du cercle osculateur en un point donné $\alpha(s)$ de la courbe?
- (d) Prouver le résultat suivant : *Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe plane C^2 dont la courbure est positive et monotone croissante, alors les cercles osculateurs $\mathcal{C}(s)$ à la courbe α sont emboîtés dans le sens suivant : Si $s_1 < s_2$, alors $\mathcal{C}(s_2)$ est contenu dans le disque bordé par $\mathcal{C}(s_1)$.*

(Pour la question (d) on peut supposer que la courbe α est paramétrée naturellement).

Réponses.

a) Le cercle osculateur est défini pour tous les points biréguliers d'une courbe de classe C^2 . Rappelons que la courbe α est birégulière en t si $\dot{\alpha}(t)$ et $\ddot{\alpha}(t)$ sont linéairement indépendants (de façon équivalente la courbure de α est non nulle en t).

b) Le cercle osculateur à la courbe α en t est contenu dans le plan osculateur, c'est-à-dire le plan affine passant par $\alpha(t)$ et de directions $\{\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)\}$, ou encore le plan par $\alpha(t)$ orthogonal à $\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)$. C'est l'unique cercle de ce plan qui est tangent à α en t et qui a la même courbure que α en t .

c) Son rayon est $\rho(t) = 1/|\kappa(t)|$ et son centre est le point $c(t) = \alpha(t) + \rho(t)\mathbf{N}_\alpha(t)$, où $\mathbf{N}_\alpha(t)$ est le vecteur normal principal à α en t . Ce cercle se paramétrise par

$$\theta \mapsto \alpha(t) + \rho(t) (1 - \cos(\theta)) \mathbf{N}_\alpha(t) + \sin(\theta) \mathbf{T}_\alpha(t).$$

d) On suppose que la courbe est paramétrée naturellement et on note s le paramètre. On remarque que si la courbure $\kappa(s)$ est une fonction positive et monotone croissante, alors $\rho(s) = 1/\kappa(s)$ est positive décroissante. Pour tout s on note $c(s) = \alpha(s) + \rho(s)\mathbf{N}_\alpha(s)$ le centre du cercle osculateur, alors

$$\dot{c}(s) = \dot{\alpha} + \dot{\rho}(s)\mathbf{N}_\alpha(s) + \rho(s)\dot{\mathbf{N}}_\alpha(s) = \mathbf{T}(s) + \dot{\rho}(s)\mathbf{N} - \rho(s)\kappa(s)\mathbf{T} = \dot{\rho}(s)\mathbf{N}.$$

En particulier la vitesse de $c(s)$ est

$$\|\dot{c}(s)\| = |\dot{\rho}(s)| = -\dot{\rho}(s).$$

Pour $s_1 < s_2$, on a alors

$$d(c(s_1), c(s_2)) \leq \int_{s_1}^{s_2} \|\dot{c}(\sigma)\| d\sigma = - \int_{s_1}^{s_2} \dot{\rho}(s) d\sigma = \rho(s_1) - \rho(s_2).$$

Cela implique que le cercle de centre $c(s_2)$ et rayon $\rho(s_2)$ est emboîté dans le cercle de centre $c(s_1)$ et rayon $\rho(s_1)$. En effet, si x est un point du second cercle alors

$$d(x, c(s_1)) \leq d(x, c(s_2)) + d(c(s_2), c(s_1)) = \rho(s_2) + (\rho(s_1) - \rho(s_2)) = \rho(s_1),$$

donc x appartient au disque de centre $c(s_1)$ et rayon $\rho(s_1)$.

Problème 3

- (a) Soient U un ouvert de \mathbb{R}^m et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application. Rappeler ce que signifie la *différentiabilité* (au sens de Frechet) de f en un point $p \in U$. Qu'appelle-t-on la *différentielle* de f en p ?
- (b) Que signifie la condition “ f est de classe C^k sur U ” ?
- (c) Qu'est ce que le *Jacobien* $J_f(p)$ de f en p . A quelle condition est-il défini ?
- (d) Définir le *rang* de f en p .
- (e) A quelle condition dit-on que f est une *submersion* ?
- (f) Énoncer soigneusement le théorème du rang constant.
- (g) Prouver que si f est de classe C^1 et si le rang de f est égale à r en p , alors le rang de f est plus grand ou égale à r dans un voisinage de p (cette propriété s'énonce en disant que la fonction $p \mapsto \text{rang}(p)$ est semi-continue inférieurement).

Réponses.

(a) L'application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable (au sens de Frechet) en $p \in U$ si il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\|f(p+h) - f(p) - L(h)\| = o(\|h\|)$, c'est-à-dire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(p+h) - f(p) - L(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

L'application linéaire L s'appelle la *différentielle* de f en p et on note $L(h) = df_p(h)$.

(b) L'application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^k si elle est continue et si toutes les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre k existent et sont continues sur U . Par exemple f est de classe C^2 signifie que les applications

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

existent et sont continues sur U pour tout $i, j = 1, \dots, m$.

On rappelle que si f est de classe C^1 , alors f est différentiable en tout point de U .

(c) Le *Jacobien* $J_f(p)$ de f en p est défini si $m = n$ et si f est différentiable en p . Par définition ce jacobien est alors le déterminant de la différentielle de f en p . Le jacobien se note $J_f(p) = \det(df_p)$.

(d) Le *rang* de f en p est par définition le rang de l'application linéaire df_p , c'est-à-dire la dimension de l'image $df_p(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^n$.

(e) On dit que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une *submersion* si f est de classe C^1 et sa différentielle df_p est surjective en tout point p de U (de façon équivalente, le rang de f est égale à n en tout point de U).

(f) Le théorème du rang constant affirme qu'une application de classe C^k dont le rang est constant est localement C^k -équivalente (via des changements de coordonnées curvilignes) à une application linéaire. Plus précisément :

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k et de rang constant égale à r . Alors pour tout point $p \in \Omega$ il existe des voisinages U_1 de p et U_2 de $q = f(p) \in \mathbb{R}^n$ tels que $U_1 \subset \Omega$, $f(U_1) \subset U_2$, ainsi que des C^k -difféomorphismes

$$\Phi_1 : U_1 \rightarrow V_1 = \Phi_1(U_1) \subset \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad \Phi_2 : U_2 \rightarrow V_2 = \Phi_2(U_2) \subset \mathbb{R}^n,$$

et une application linéaire $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de rang r tels que

$$L \circ \Phi_1 = \Phi_2 \circ f.$$

La situation peut se représenter sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{f} & U_2 \\ \Phi_1 \downarrow & & \downarrow \Phi_2 \\ V_1 & \xrightarrow{L} & V_2 \end{array}$$

On peut aussi écrire

$$L|_{V_1} = \Phi_2 \circ f \circ \Phi_1^{-1}.$$

Quitte à faire encore un changement linéaire de coordonnées, on peut se ramener au cas où l'application L s'écrit

$$L(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

(g) Dire que le rang de f en p est égale à r signifie qu'il existe exactement r indices $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, m\}$ tel que les dérivées partielles

$$df_p(\mathbf{e}_{i_1}) = \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(p), \dots, df_p(\mathbf{e}_{i_r}) = \frac{\partial f}{\partial x_{i_r}}(p) \in \mathbb{R}^n$$

sont linéairement indépendantes. L'hypothèse que f est de classe C^1 entraîne que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(q), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{i_r}}(q)$ varient continûment avec q et donc restent linéairement indépendantes dans un voisinage de p . Pour tout point q dans un tel voisinage, on a donc $\text{rang}(f, q) \geq r$.

Autre argument : Le rang de f est égale au rang de la matrice jacobienne $Df = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)$. Ce rang est $\geq r$ si et seulement si cette matrice admet un mineur de taille $r \times r$ de déterminant non nul. Il s'agit clairement d'une condition ouverte par continuité du déterminant du mineur considéré.

Problème 4.

- (a) Définir l'*application de Gauss* d'une surface régulière orientable $S \subset \mathbb{R}^3$ de classe C^1 .
- (b) Supposons que la surface S est de classe C^2 . Prouver que la différentielle de l'application de Gauss de S en un point p définit un endomorphisme du plan tangent $T_p S$.
- (c) Comment s'appelle l'endomorphisme défini en (b) ?
- (d) Prouver que cet endomorphisme est auto-adjoint.
- (e) Expliquer pourquoi les valeurs propres de cet endomorphisme sont réelles. Comment appelle-t-on ces valeurs propres ?
- (f) Comment appelle-t-on la trace et le déterminant de cet endomorphisme ?

(a) La co-orientation de la surface régulière $S \subset \mathbb{R}^3$ se définit par le choix d'un champ de vecteur $\nu : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui est continu, de norme 1 et en tout point orthogonal au plan tangent à S (plus précisément $\nu(p) \perp T_p S$ pour tout $p \in S$).

On peut donc voir la co-orientation comme une application

$$\nu : S \rightarrow \mathbb{S}^2$$

(la sphère unité de \mathbb{R}^3); c'est cette application qu'on appelle l'*application de Gauss* de la surface S .

(b) En raison des formules connues pour exprimer ν , il est clair que si la surface S est de classe C^k , alors l'application de Gauss est de classe C^{k-1} . En particulier si S est de classe C^2 , alors $\nu : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ est de classe C^1 et la différentielle

$$d\nu_p : T_p S \rightarrow T_{\nu(p)} \mathbb{S}^2$$

est bien définie (et continue) pour tout p . Mais on sait que le plan tangent $T_q \mathbb{S}^2$ en un point q de \mathbb{S}^2 n'est autre que le plan orthogonal au vecteur q , par conséquent le plan tangent à \mathbb{S}^2 au point $\nu(p)$ coïncide avec le plan tangent à S en p :

$$T_p S = T_{\nu(p)} \mathbb{S}^2,$$

pour tout $p \in S$. On en déduit que l'application linéaire

$$d\nu_p : T_p S \rightarrow T_{\nu(p)} \mathbb{S}^2 = T_p S$$

est bien un endomorphisme de $T_p S$.

(c) L'endomorphisme qu'on vient de définir s'appelle l'*application de Weingarten* de S en p . On le note $L = d\nu_p : T_p S \rightarrow T_p S$.

(d) Pour prouver que L est auto-adjoint, on choisit une paramétrisation locale $\psi : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ de la surface. Alors pour chaque $(u_1, u_2) \in \Omega$, les vecteurs $\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u_1}$ et $\mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial u_2}$ forment

une base du plan tangent $T_p S$ (où $p = \psi(u_1, u_2)$), et on a par définition de l'application de Weingarten :

$$L(\mathbf{b}_i) = d\nu(\mathbf{b}_i) = d\nu \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_i} \right) = \frac{\partial \nu}{\partial u_i}.$$

On a aussi $\langle \nu(u), \mathbf{b}_j(u) \rangle = 0$, donc

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_i} \langle \nu(u), \mathbf{b}_j(u) \rangle = \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial u_i}, \mathbf{b}_j \right\rangle + \left\langle \nu, \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial u_i} \right\rangle.$$

Par conséquent :

$$\langle L(\mathbf{b}_i), \mathbf{b}_j \rangle = \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial u_i}, \mathbf{b}_j \right\rangle = - \left\langle \nu, \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial u_i} \right\rangle = - \left\langle \nu, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle.$$

(on utilise que $\frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{\partial \psi}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j}$).

On a donc

$$\langle L(\mathbf{b}_i), \mathbf{b}_j \rangle = - \left\langle \nu, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle = - \left\langle \nu, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_j \partial u_i} \right\rangle = \langle L(\mathbf{b}_j), \mathbf{b}_i \rangle$$

ce qui signifie que L est autoadjointe.

(e) Les valeurs propres de tout opérateur autoadjoint sur un espace vectoriel complexe sont réelles. Les valeurs propres de L sont les courbures principales de la surface (multipliées par -1).

(f) La trace de L est égale à -2 fois la courbure moyenne. Le déterminant de L est la courbure de Gauss.

Pour (e) et (f) on peut écrire : $k_1, k_2 =$ valeurs propres de $(-L)$, et

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = - \frac{\text{Trace}(L)}{2} = \text{courbure moyenne},$$

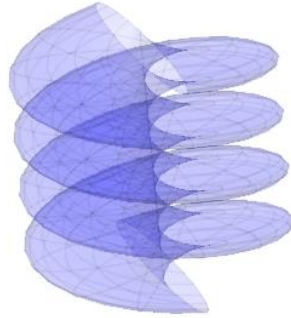
$$K = k_1 k_2 = \det(L) = \text{courbure de Gauss}.$$

Problème 5.

La *sphère-helicoïde* est la surface de \mathbb{R}^3 paramétrée par

$$\psi(u, v) = (\cos(v) \sin(u), \cos(v) \cos(u), u + \sin(v)).$$

Cette surface ressemble à ceci :



- (a) Calculer le tenseur métrique de cette surface paramétrée.
 (b) Que vaut l'élément d'aire dA ?
 (c) Calculer la deuxième forme fondamentale de cette surface en un point $\psi(u, v)$.
 (d) Calculer la courbure de Gauss de cette surface en un point $\psi(u, v)$.

Solution (a) La base adaptée du plan tangent est

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos(v) \cos(u) \\ -\cos(v) \sin(u) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\sin(v) \sin(u) \\ -\sin(v) \cos(u) \\ \cos(v) \end{pmatrix}$$

Donc on trouve le tenseur métrique

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 + \cos(v)^2 & \cos(v) \\ \cos(v) & 1 \end{pmatrix}$$

b) On a $\det(\mathbf{G}) = 1$, donc l'élément d'aire est

$$dA = \sqrt{\det(\mathbf{G})} du dv = du dv.$$

c) Pour trouver la deuxième forme fondamentale on doit d'abord calculer le vecteur normal

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -(\cos(v))^2 \sin(u) + \sin(v) \cos(u) \\ -(\cos(v))^2 \cos(u) - \sin(v) \sin(u) \\ -\sin(v) \cos(v) \end{pmatrix}$$

Puis calculer

$$h_{11} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial u}, \boldsymbol{\nu} \right\rangle = -\left\langle \mathbf{b}_1, \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial u} \right\rangle$$

et

$$h_{12} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial v}, \boldsymbol{\nu} \right\rangle = -\left\langle \mathbf{b}_1, \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial v} \right\rangle, \quad h_{22} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial v}, \boldsymbol{\nu} \right\rangle = -\left\langle \mathbf{b}_2, \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial v} \right\rangle$$

Il y a deux options pour faire ces calculs. On peut ou bien dériver $\boldsymbol{\nu}$ ou bien \mathbf{b}_i selon ce qui le plus simple selon les cas.

Pour ce problème, calculons les dérivées de $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. On trouve

$$\mathbf{b}_{11} = \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial u} = \begin{pmatrix} -\cos(v) \sin(u) \\ -\cos(v) \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{b}_{12} = \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\sin(v) \cos(u) \\ \sin(v) \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{22} = \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\cos(v) \sin(u) \\ -\cos(v) \cos(u) \\ -\sin(v) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -(\cos(v))^2 \sin(u) + \sin(v) \cos(u) \\ -(\cos(v))^2 \cos(u) - \sin(v) \sin(u) \\ -\sin(v) \cos(v) \end{pmatrix}$$

On remarque que $\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\| = \sqrt{\det G} = 1^1$, on a donc $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$, et par conséquent

$$\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\| = \sqrt{\det G} = 1$$

On a donc

$$\begin{aligned} h_{11} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial u}, \boldsymbol{\nu} \right\rangle = \cos(v)^3, \\ h_{12} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial v}, \boldsymbol{\nu} \right\rangle = -\sin(v)^2, \\ h_{22} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial v}, \boldsymbol{\nu} \right\rangle = \cos(v) \end{aligned}$$

(on peut gagner du temps si on remarque que $\mathbf{b}_{22} = \mathbf{b}_{11} - \sin(v)\mathbf{e}_3$, donc $h_{22} = h_{11} - \sin(v)\langle \mathbf{e}_3, \boldsymbol{\nu} \rangle$).

Ainsi

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \cos(v)^3 & -\sin(v)^2 \\ -\sin(v)^2 & \cos(v) \end{pmatrix}$$

(d) La courbure de Gauss est

$$K = \frac{\det(\mathbf{H})}{\det(\mathbf{G})} = \frac{\det(\mathbf{H})}{1} = \cos(v)^4 - \sin(v)^4 = 2\cos(v)^2 - 1.$$

¹On peut bien sûr calculer que $\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|^2 = (-\sin(u)\cos(v)^2 + \cos(u)\sin(v))^2 + (-\cos(u)\cos(v)^2 - \sin(v)\sin(u))^2 + (-\cos(u)^2\cos(v)\sin(v) - \sin(u)^2\cos(v)\sin(v))^2 = 1$, mais dans notre cas il est plus facile de vérifier que $\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|^2 = \det(G) = 1$.

Problème 6.

Soit $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière de classe C^2 d'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ que l'on suppose coorientée. Pour $(u, v) \in \Omega$, on note $\boldsymbol{\nu}(u, v)$ le vecteur unitaire normal à S en $\psi(u, v)$ correspondant à la coorientation choisie, puis on définit une application $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$f(u, v, t) = \psi(u, v) + t \cdot \boldsymbol{\nu}(u, v).$$

On dit que le point $q \in \mathbb{R}^3$ est un *point focal* de S associé au point $p = \psi(u, v) \in S$ (pour $(u, v) \in \Omega$) s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(u, v, t) = q$ et la différentielle df est singulière en (u, v, t) .

- (a) Montrer que la différentielle de f au point (u, v, t) est l'application linéaire qui envoie le vecteur $\xi = \xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2 + \xi_3 \mathbf{e}_3$ sur

$$df_{(u,v,t)}(\xi) = \xi_1 (\mathbf{b}_1 + tL(\mathbf{b}_1)) + \xi_2 (\mathbf{b}_2 + tL(\mathbf{b}_2)) + \xi_3 \boldsymbol{\nu}(u, v),$$

où $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 , $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ est la base du plan tangent à la surface adaptée à la paramétrisation ψ et L est l'application de Weingarten.

- (b) Démontrer que les points focaux de S sont les points $q = f(u, v, t)$ tels que $1/t$ est courbure principale de S en $\psi(u, v)$.
- (c) En déduire que pour tout point $p \in S$ il y a au plus un nombre fini de points focaux associés. Quel est ce nombre maximal ?
- (d) Trouver les points focaux à la surface d'équation

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$$

associés au point $p = (0, 0, 0)$.

Solution.

- (a) La différentielle df en (u, v, t) est l'application linéaire qui envoie le vecteur $\xi = \xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2 + \xi_3 \mathbf{e}_3$ sur

$$df_{(u,v,t)}(\xi) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial u} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial v} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial t} = \xi_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} + t \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial u} \right) + \xi_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} + t \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial v} \right) + \xi_3 \boldsymbol{\nu}.$$

Notons d'une part que la base adaptée du plan tangent $T_{\psi(u,v)}S$ est

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

et d'autre part que l'application de Weingarten L vérifie

$$L(\mathbf{b}_1) = \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial u}, \quad L(\mathbf{b}_2) = \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial v}$$

On a donc

$$df_{(u,v,t)}(\xi) = \xi_1 (\mathbf{b}_1 + tL(\mathbf{b}_1)) + \xi_2 (\mathbf{b}_2 + tL(\mathbf{b}_2)) + \xi_3 \boldsymbol{\nu}(u, v).$$

-
- (b) Le calcul précédent montre que le vecteur $df_{(u,v,t)}(\xi)$ est nul si et seulement si $\xi_3 = 0$ et

$$(\text{Id} + tL)(\xi_1 \mathbf{b}_1 + \xi_2 \mathbf{b}_2) = 0.$$

On a donc montré que $\ker(df) \neq \{0\}$ si et seulement si $\ker(\text{Id} + tL) \neq \{0\}$. En particulier $t \neq 0$ et $-1/t$ est valeur propre de L ; ce qui signifie que $k = 1/t$ est une courbure principale de la surface au point considéré.

(c) L'application de Weingarten L en un point de la surface est un endomorphisme autoadjoint du plan tangent à la surface en ce point, qui est un espace vectoriel de dimension 2. Cet endomorphisme admet donc une valeur propre ou deux valeurs propres distinctes (toutes les valeurs propres sont réelles puisque L est symétrique).

Par le point (a), chaque point de la surface admet 0, 1 ou 2 points focaux (il y a 0 point focaux lorsque L est l'application nulle), i.e. le point est plat.

(d) Une paramétrisation de la surface quadratique d'équation $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$ est donnée par $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ où

$$\psi(x, y) = (x, y, \frac{1}{2}(ax^2 + by^2))$$

(il s'agit d'un graphe, on peut donc noter (x, y) au lieu de (u, v) pour les paramètres).

- Le champ de vecteurs normal (application de Gauss) est

$$\nu_{(x,y)} = \frac{(-ax, -ay, 1)}{\sqrt{1 + (ax)^2 + (by)^2}}.$$

- On calcule alors explicitement l'application f , on trouve que

$$f(x, y, t) = \psi(x, y) + t \cdot \nu_{(x,y)} = f(x, y, t) = ((1 - \lambda ta)x, (1 - \lambda tb)x, \lambda t + \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)),$$

avec

$$\lambda(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + (ax)^2 + (by)^2}}.$$

- En $(x, y) = (0, 0)$, on a $\lambda = 1$ et $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0$, de là on calcule facilement que

$$Df_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 - at & 0 & 0 \\ 0 & 1 - bt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On a $\det(Df_{(0,0,0)}) = 0$ si et seulement si $t = 1/a$ ou $t = 1/b$.

- Les points focaux cherchés sont donc $(0, 0, \frac{1}{a})$ et $(0, 0, \frac{1}{b})$.